

A Study on Stability Analysis and The Estimation of The Reachable Set for Generalized Neural Networks Systems*

Kim, Seung Ho

*Department of Electrical Engineering
Graduate School, Chungbuk National University
Cheongju, Republic of Korea
Supervised by Professor Kwon, Oh Min*

Abstract

In this thesis, the problem of stability analysis is dealt with in a generalized neural networks system, and the estimation of the reachable set is applied in Markovian jump neural networks systems with time-varying delays. The stability analysis is suggested through the linear matrix inequalities. Based on a concept of stability analysis, the optimized solution of the reachable set is proposed. By constructing improved augmented Lyapunov-Krasovskii functionals and utilizing well-known lemmas to verify maximum delay bounds and minimum reachable sets in neural networks systems, the proposed method results are derived. The numerical examples show the effectiveness and superiority of the proposed methods.

Keywords: Neural networks systems, Reachable set, Time-varying delay, Stability analysis, Lyapunov-Krasovskii functionals

*A thesis for the degree of master in August 2022.

1. 연구내용

(1-1) 일반화된 신경망 시스템의 안정성 분석

$$V(t) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

where

$$V_1 = \zeta_1^T(t, s) R \zeta_1(t, s),$$

$$V_2 = \int_{t-h_M}^t \zeta_2^T(t, s) N \zeta_2(t, s) ds$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^n \left(\lambda_{1,i} \int_0^{W_{2,i}x(t)} (f_i(s) - k_i^- s) ds + \delta_{1,i} \int_0^{W_{2,i}x(t)} (k_i^+ s - f_i(s)) ds \right)$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^n \left(\lambda_{2,i} \int_0^{W_{2,i}x(t-h_M)} (f_i(s) - k_i^- s) ds + \delta_{2,i} \int_0^{W_{2,i}x(t-h_M)} (k_i^+ s - f_i(s)) ds \right),$$

$$V_3 = \int_{t-h(t)}^t \zeta_3^T(t, s) G \zeta_3(t, s) ds,$$

$$V_4 = \int_{t-h_M}^t \int_s^t \beta^T(u) Q \beta(u) du ds.$$

(1)

$$\begin{bmatrix} (\Gamma^\perp)^T (\Xi_{[h_M]} + \Xi_{6[h_M]}) (\Gamma^\perp) & (\Gamma^\perp)^T (h_M S_1) & (\Gamma^\perp)^T (h_M U_1) \\ * & -h_M Q_1^{aug} & 0_{3n} \\ * & * & -3h_M Q_1^{aug} \end{bmatrix} < 0, \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} (\Gamma^\perp)^T (\Xi_{[0]} + \Xi_{6[0]}) (\Gamma^\perp) & (\Gamma^\perp)^T (h_M S_2) & (\Gamma^\perp)^T (h_M U_2) \\ * & -h_M Q_2^{aug} & 0_{3n} \\ * & * & -3h_M Q_2^{aug} \end{bmatrix} < 0,$$

$$Q_1^{aug} \geq 0,$$

$$Q_2^{aug} \geq 0.$$

위와 같은 리아프노프-크라소프스키 함수가 주어졌을 때,

리아프노프 방법, 적분 부등식 그리고 수학적 기법을 활용하여 선형 행렬 부등식 조건을 도출하면 다음과 같다.

선형 행렬 부등식을 통해서 각 h_D 에 따른 h_M 의 최대값을 도출한 결과를 보면 아래 표와 같다.

표 1. 각 h_D 에 따른 신경망 시스템의 h_M 의 최댓값

h_D	0.8	0.9	unknown
논문 1	6.7001	4.0747	3.6066
논문 2	6.7186	3.9623	3.6654
논문 3	7.1718	4.2979	3.7615
해당 논문	9.3612	5.1996	4.2019

표의 결과와 같이 제안한 해당 논문이 이전에 게재된 논문의 결과보다 우수한 결과를 보인다. 제안한 기법을 이용한다면 더 긴 시간의 지연이 발생하여도 시스템의 안정성을 보장할 수 있다.

(1-2) Markovian jump 신경망 시스템의 도달 가능한 집합 추정

$$V(x(t), m) = V_1(x(t), m) + \sum_{i=2}^4 V_i(x(t)),$$

where

$$V_1 = x^T(t) U_m x(t) + \eta_1^T(t) P \eta_1(t),$$

$$V_2 = \int_{t-h_M}^t e^{\alpha(s-t)} \eta_2^T(s) Q \eta_2(s) ds$$

$$+ 2e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^n \left(\lambda_{1,i} \int_0^{W_{2,i}x(t)} (f_i(s) - k_i^- s) ds + \delta_{1,i} \int_0^{W_{2,i}x(t)} (k_i^+ s - f_i(s)) ds \right)$$

$$+ 2e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^n \left(\lambda_{2,i} \int_0^{W_{2,i}x(t-h_M)} (f_i(s) - k_i^- s) ds + \delta_{2,i} \int_0^{W_{2,i}x(t-h_M)} (k_i^+ s - f_i(s)) ds \right),$$

$$V_3 = \int_{t-h(t)}^t \begin{bmatrix} x(s) \\ f(W_i x(s)) \end{bmatrix}^T Q_2 \begin{bmatrix} x(s) \\ f(W_i x(s)) \end{bmatrix} ds,$$

$$V_4 = \int_{t-h_M}^t \int_s^t e^{\alpha(u-t)} \eta_2^T(u) R \eta_2(u) du ds.$$

(3)

$$\begin{bmatrix} (\Gamma^\perp)^T (\Xi_{[h_M]}^m - \beta e_{19} e_{19}^T) (\Gamma^\perp) & (\Gamma^\perp)^T (h_M S_1) & (\Gamma^\perp)^T (h_M N_1) \\ * & -h_M e^{\alpha h_M} R_{aug1} & 0_{3n} \\ * & * & -3h_M e^{\alpha h_M} R_{aug1} \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} (\Gamma^\perp)^T (\Xi_{[0]}^m - \beta e_{19} e_{19}^T) (\Gamma^\perp) & (\Gamma^\perp)^T (h_M S_2) & (\Gamma^\perp)^T (h_M N_2) \\ * & -h_M e^{\alpha h_M} R_{aug2} & 0_{3n} \\ * & * & -3h_M e^{\alpha h_M} R_{aug2} \end{bmatrix} < 0,$$

$$R_{aug1} \geq 0,$$

$$R_{aug2} \geq 0.$$

위와 같은 리아프노프-크라소프스키 함수가 주어졌을 때,

리아프노프 방법, 적분 부등식 그리고 수학적 기법을 활용하여 선형 행렬 부등식 조건을 도출하면 다음과 같다.

선형 행렬 부등식을 통해서 $h_M = 2$ 이고, 각 μ 에 따른 허용 가능한 $\bar{\delta}$ 의 최솟값을 도출한 결과를 보면

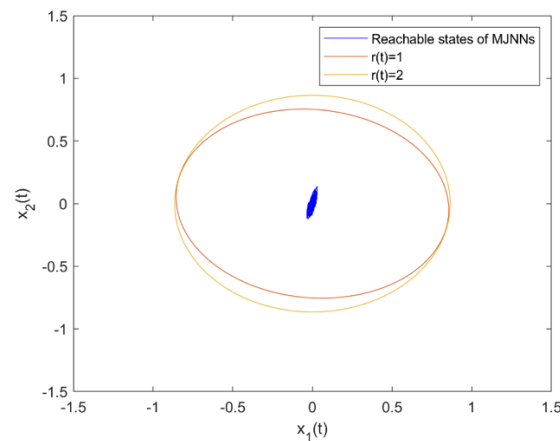
아래 표와 같다.

표 2. $h_M = 2$ 이고, 각 μ 에 따른 허용 가능한 $\bar{\delta}$ 의 최솟값

μ	0.2	0.4	0.6	0.8
논문 4	0.6821	0.8578	1.2302	2.2204
해당 논문	0.4698	0.5031	0.5301	0.5469

표의 결과와 같이 제안한 해당 논문이 이전에 게재된 논문의 결과보다 우수한 결과를 보인다. 제안한 기법을 이용한다면 신경망 시스템의 상태가 도달 가능한 집합의 영역을 최소화하여 동작할 수 있다. 아래의 그림은 도달 가능한 집합의 영역 내에 신경망 시스템의 상태가 존재하는 것을 보여주는 그래프이다.

그림 1. 도달 가능한 집합의 영역 내에 신경망 시스템의 상태



2. 연구결과

시간 변화하는 지연을 갖는 신경망 시스템의 안정성과 도달 가능한 집합을 분석하고 최적화하는 방법을 제안한다. 이 방법은 새로운 Lyapunov-Krasovskii 함수, 일반화된 자유 가중 행렬 부등식, 증가된 제로 등식 접근법 등의 수학적 기법을 활용하여 선형 행렬 부등식의 형태로 문제를 풀 수 있게 한다.

Matlab 프로그램의 LMI Toolbox를 활용하였다. 제안된 방법들은 이론적으로 증명되고, 수치적 예제를 통해 효과성과 우수성이 입증된다. 이전 연구들과 비교하여 더 넓은 가능 영역과 더 적은 보존성을 보인다.

제안된 방법들은 신경망 시스템의 안정성 분석과 도달 가능한 집합 추정에 대한 유용한 기여를 한다. 향후 연구에서는 더 다양한 신경망 모델과 불확실성 요소를 고려하여 더 일반적이고 강력한 결과를 도출할 수 있도록 노력할 것이다.

3. 연구결과의 활용

- 시스템의 안정성 분석은 모든 제품을 개발하거나 시스템을 구축함에 있어서 필수적인 부분이다. 또한, 모든 실제 시스템에서는 외란으로 인한 시간지연으로 인한 불안정성을 피할 수 없기 때문에 이를 고려해야 한다. 안정성 분석의 기본적인 연구를 바탕으로 도달 가능한 집합의 추정에 대해 연구할 수 있고, 이러한 내용들은 비행물체 물체 사이의 충돌 해결, 로봇 팔에 관한 모델링, 그리고 어댑티브 크루즈 컨트롤 시스템에서 활용이 가능하다.